Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ No. 1 Date 16/12/2019

→ απαιτεί διαφορισιμότητα και της f και της $\bar\varphi$.

$\boxed{\text{Κανόνας της αλυσίδας}}$ δηλ: $\underbrace{(f\circ\bar\varphi)'(0)}_{f\circ\bar\varphi:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}=\mathbb{R}^1,\ \in\mathbb{R}=\mathbb{R}^1} \underset{n=m=1}{=} D(f\circ\bar\varphi)(0) = \underbrace{Df(\underbrace{\bar\varphi(0)}_{=\bar x})}_{\in\mathbb{R}^{1\times n},\ =\nabla f(\bar x)} \underbrace{D\bar\varphi(0)}_{=\bar\varphi'(0)=\bar v\in\mathbb{R}^{n\times 1}}$

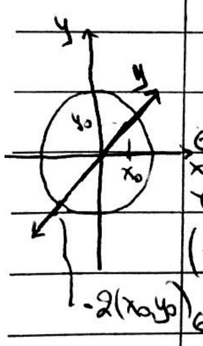
$\in\mathbb{R}=\mathbb{R}^{1\times 1}$

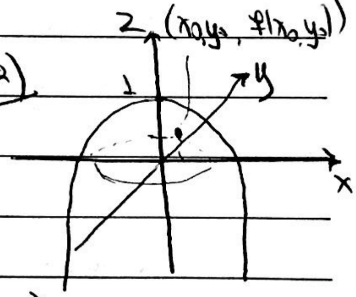
→ Στην περίπτωση αυτή (f διαφορίσιμη στο $\bar x$) βλέπουμε ότι η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η $\frac{\partial f}{\partial \bar v}(\bar x)$ [από όλες τις κατευθύνσεις $\bar v$ για σταθερό f και σταθερό $\bar x$] λαμβάνεται στην κατεύθυνση $\bar v = \frac{\nabla f(\bar x)}{\|\nabla f(\bar x)\|}$ ($\in\mathbb{R}^n$, >0), αν φυσικά $\nabla f(\bar x)\neq\bar 0$. [$\|\bar v\|=1$] αφού $\left|\frac{\partial f}{\partial \bar v}(\bar x)\right| = |\nabla f(\bar x)\cdot\bar v| \underset{CS}{\le} \|\nabla f(\bar x)\|\cdot\underbrace{\|\bar v\|}_{=1}$ και $\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\nabla f(\bar x)}{\|\nabla f(\bar x)\|}\right)}(\bar x) = \nabla f(\bar x)\cdot\frac{\nabla f(\bar x)}{\|\nabla f(\bar x)\|} = \|\nabla f(\bar x)\|$

και είναι (η μέγιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου από όλες τις κατευθύνσεις) $=\|\nabla f(\bar x)\|$ [Αν $\nabla f(\bar x)=\bar 0$, τότε $\frac{\partial f}{\partial\bar v}(\bar x)=0,\ \forall\bar v\in\mathbb{R}^n$]

Λέμε τότε ότι στο $\bar x$ (όπου η f είναι διαφ.) η f έχει στην κατεύθυνση $\frac{\nabla f(\bar x)}{\|\nabla f(\bar x)\|}$ (με $\nabla f(\bar x)\neq\bar 0$) τον μεγαλύτερο ρυθμό μεταβολής, ο οποίος είναι $\|\nabla f(\bar x)\|>0$

[Απλά: Έστω $f:\underset{B((0,0),1)}{\mathbb{R}^2}\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = \underbrace{1-(x^2+y^2)}_{\le 1 = f(0,0)}$





είναι πολύ χοντροκομμένο μοντέλο από το Μιτσικέλη τότε αν βρισκόμαστε στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))\in\Gamma_f$ (το οποίο στο χάρτη έχει συντεταγμένες $(x_0,y_0)\in B((0,0),1)$) έχουμε στο σημείο αυτό $\nabla f(x_0,y_0) = -2(x_0,y_0)$

⇒ η κατεύθυνση προς την οποία η πλαγιά είναι η πιο απότομη (αυξάνουσα) είναι η $\bar v = \frac{-(x_0,y_0)}{\|(x_0,y_0)\|}$ και η αύξηση είναι $\|\nabla f(x_0,y_0)\|$

∇! Είδαμε ότι για την $f: U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$ (ανοικτό U) η f έχει το μεγαλύτερο ρυθμό μεταβολής $\|\nabla f(\bar x)\| > 0$ στην κατεύθυνση $\bar v = \dfrac{\nabla f(\bar x)}{\|\nabla f(\bar x)\|}$ ισχύει και κατά «δυϊκό».

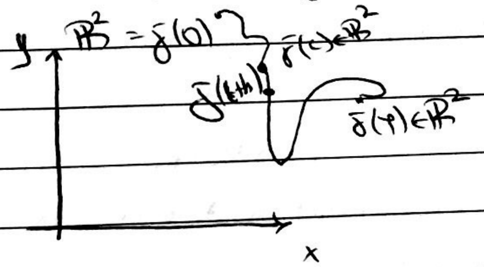
∇! Η $\nabla f(\bar x)$ είναι κάθετη στο σύνολο στάθμης $L_f(\underbrace{f(\bar x)}_{:=a}) = \{\bar y \in U : f(\bar y) = f(\bar x)\}$ $=a \in \mathbb{R}$

δηλ. (ορισμός:) για κάθε διαφορίσιμη καμπύλη $\bar\gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ με $\bar\gamma((-\varepsilon,\varepsilon)) \subset L_f(f(\bar x))$ και $\bar\gamma(0) = \bar x$ (????) ισχύει $\bar\gamma'(0)\cdot\nabla f(\bar x) = 0$ [δηλ. $\nabla f(\bar x) \perp \bar\gamma'(0)$]

Εδώ (απαιτούμενος ορισμός / έννοια) ορίζουμε παραμετρική καμπύλη μια συνεχή απεικόνιση $\bar\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, όπου $\forall t \in I$

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\|\bar\gamma(t+h)-\bar\gamma(t)\| = 0}_{\iff \bar\gamma \text{ συνεχής στο } t\in I}$$

$I = [0, T]$, $\bar\gamma: [0,T] \to \mathbb{R}^2$ ($\bar\gamma$ = τροχιά)



$\bar\gamma$ είναι διαφορίσιμη στο $t \in I$

$\iff \exists \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\bar\gamma(t+h)-\bar\gamma(h)}{h} =: \bar\gamma'(t) = [= D\bar\gamma(t)] \in \mathbb{R}^n$

η παράγωγος της $\bar\gamma$ στο t [= εφαπτόμενο διάνυσμα της $\bar\gamma$ στο σημείο $\bar\gamma$ στο σημείο $\bar\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$]

[$\iff \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\bar\gamma(t+h)-\bar\gamma(t)-\bar\gamma'(0)h}{h} = \bar 0$] = διάνυσμα ταχύτητας της τροχιάς $\bar\gamma(t)$ χρονική στιγμή t]

$\frac{\bar\gamma(t+h)-\bar\gamma(t)}{h}$ = η απόσταση μεταξύ $\bar\gamma(t)$ και $\bar\gamma(t+h)$ δια τον χρόνο που χρειαστήκαμε για να πάμε από το ένα στο άλλο.

Αφού $\bar\gamma((-\varepsilon,\varepsilon)) \subset L_f(f(\bar x)) \subset \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon): \bar\gamma(t) \in L_f(f(\bar x))$

$\Leftrightarrow \underbrace{f(\bar\gamma(t))}_{=(f\circ\bar\gamma)(t)} = f(\bar x)$

$\Rightarrow \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon): (f\circ\bar\gamma)'(t)=0 \Rightarrow \underbrace{(f\circ\bar\gamma)'(0)=0}_{=\nabla f(\underbrace{\bar\gamma(0)}_{=\bar x})\cdot\bar\gamma'(0)}$

καν. αλυσ.

απαιτεί διανυσ. της f^∇ στο $\bar x$ (την έχουμε)

· « Μιτοικεπι »: $f(x,y) = 1-(x^2,y^2)$, $(x,y)\in B((0,0),1)$

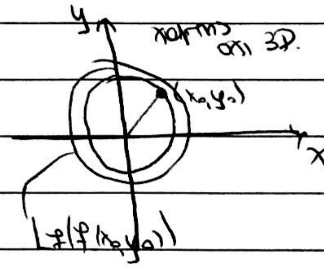
Εφαπτόμενο στην πλαγιά:

$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y)\in B((0,0),1)\}\subset\mathbb{R}^3$

στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))\in\Gamma_f$ $((x_0,y_0)\neq(0,0))$ στην κατεύθ. $\bar v = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|} = \frac{-(x_0,y_0)}{\|(x_0,y_0)\|}$

Η καμπύλη στάθμης $f(x_0,y_0)$ είναι $L_f(f(x_0,y_0)) = \{(x,y)\in B((0,0),1):$
$\underbrace{f(x,y)}_{=1-(x^2+y^2)} = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{=u\in(0,1)\, = 1-(x_0^2+y_0^2)}\} = \{(x,y)\in B((0,0),1):$

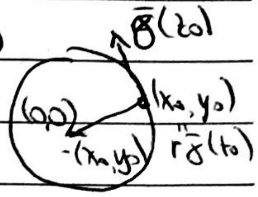
$x^2+y^2 = (\sqrt{1-u})^2\} = (\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2$



Μια παραμετρικοποίηση:

$$\gamma(t) = \underbrace{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}_{=r}\,(\cos t, \sin t),\ t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = \lim_{h\to 0}\begin{pmatrix} \dfrac{r\cos(t+h) - r\cos t}{h} \\[2ex] \dfrac{r\sin(t+h) - t\sin t}{h} \end{pmatrix} = r(-\sin t, \cos t)$$



Συνεπώς, αν $(x_0,y_0) = r(\cos t_0, \sin t_0)$ έχουμε $\gamma'(t_0)\cdot\nabla f(x_0,y_0) =$
$= r(-\sin t_0, \cos t_0) = 0 \cdot (-2) \cdot r(\cos t_0, \sin t_0)$